Composition de mathématiques pour le concours de directeur des services pénitentiaires, session 2014

(durée de l'épreuve: 4h)

Calculatrice interdite

Cette composition comporte cinq exercices indépendants entre eux que les candidats peuvent résoudre dans l'ordre qu'ils souhaitent. Un soin particulier devra être porté à la rédaction et à la citation des théorèmes employés.

1 Algèbre linéaire : puissances d'une matrice à l'aide d'une matrice nilpotente

Soit $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Soit $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels.
Soit $M_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des endomorphismes à valeurs réelles de dimension n.

$B \in M_n(\mathbf{R})$ est nilpotente si et seulement si il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que :$B^p = \mathbf{0}$, avec $\mathbf{0} \in M_n(\mathbf{R})$ qui est la matrice nulle.

1.1 Pour commencer... $n = 3$

Soit $A \in M_3(\mathbf{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit I_3 la matrice identité.

1. Soit $F \in M_3(\mathbf{R})$ une matrice quelconque. Montrer que I_3 et F commutent, ie : $I_3F = FI_3$
2. Est-ce que A est diagonalisable (sans calcul) ?
3. Montrer que A peut s'écrire sous la forme d'une somme entre I_3 et B une matrice nilpotente. Calculer B^2, B^3, et B^m pour m supérieur ou égal à 4.
4. En utilisant la formule du binôme de Newton (justifiez cette utilisation), calculer A^n

1.2 Endomorphisme nilpotent de dimension n : quelques propriétés

1. On rappelle que : $B \in M_n(\mathbf{R})$ est nilpotente si et seulement si il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que :$B^p = \mathbf{0}$, avec $\mathbf{0} \in M_n(\mathbf{R})$ qui est la matrice nulle. Est-ce que B peut être inversible ? En déduire que le rang de B est inférieur ou égal à $n-1$.
2. Soit b l'endomorphisme de E (espace vectoriel) associé à la matrice B. Soit $x \in E$ tel que $b^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, b(x). ..., b^{p-1})$ est une famille libre. En déduire que $p \leq n$.
3. On suppose à présent que $p = n$. Montrer qu'il existe une base S telle que la matrice B associée à b dans cette base s'écrive :

$$B_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2 Analyse : La fonction Gamma

On appelle fonction Gamma. notée Γ, la fonction définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \tag{1}$$

1. Déterminer l'intervalle de définition de Γ
2. Montrer que Γ est continue puis est de classe C^∞ sur ce même intervalle.
3. Montrer que pour tout x strictement positif : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$
4. En admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.
5. Montrer que Γ est convexe, étudier ses variations (notamment les comportements asymptotiques).

3 Analyse : Séries de Fourier

Soit la fonction$f$ une fonction périodique (de période égale à 2π) et continue définie par :

$$\forall x \in]0, 2\pi[, f(x) = x(2\pi - x) \tag{2}$$

1. Développer f en série de Fourier en utilisant le théorème de Jordan-Dirichlet.
2. En utilisant les valeurs de f en 0 et π. calculer :$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$
3. En utilisant l'égalité de Parseval. calculer :$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

4 Equations différentielles : solutions développables en série entière

On rappelle que le sinus hyperbolique s'écrit sous la forme : $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

1. Développer sh(x) en série entière.
2. Trouver les solutions développables en série entière de l'équation differentielle suivante : $xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$

5 Statistiques : formule de Bayes

Un dépistage systématique de la vue est effectué à la naissance.

2% des bébés ont des problèmes de vue. Le dépistage présente 95% de résultats positifs avec le test tikettak sur les bébés ayant réellement des troubles, et 6% de de résultats positifs avec le test tikettak sur les bébés n'ayant aucun trouble.

1. Enoncer la formule de Bayes pour deux événements.
2. Quelle est la probabilité qu'un bébé pris au hasard soit atteint de ces troubles sachant que le test tikettak est positif ?
3. Quelle est la probabilité qu'un bébé pris au hasard soit indemne de ces troubles sachant que le test tikettak est négatif ?